Ejercicios de Análisis Matemático
Desigualdades y funciones elementales - Soluciones

1. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{x^3 + 1} > 0.$$

Solución. Sabemos que al multiplicar una desigualdad por un número positivo se obtiene otra desigualdad equivalente a la dada. Por tanto, si a y b son números reales con $b \neq 0$, tenemos que:

$$\frac{a}{b} > 0 \Longleftrightarrow \frac{a}{b} b^2 = ab > 0.$$

En consecuencia, la desigualdad del enunciado es equivalente a:

$$h(x) = (x^2 - 4x - 2)(x^3 + 1) > 0.$$

Como h es una función polinómica, sabemos que sus raíces[1] determinan intervalos en donde la función es siempre positiva o siempre negativa[2]. Evidentemente, las raíces de h son las soluciones de alguna de las ecuaciones

$$x^2 - 4x - 2 = 0, \qquad x^3 + 1 = 0.$$

Las soluciones de la primera ecuación son:

$$\alpha = \frac{4 - \sqrt{24}}{2} = 2 - \sqrt{6}, \qquad \beta = \frac{4 + \sqrt{24}}{2} = 2 + \sqrt{6}.$$

La segunda ecuación tiene una solución evidente, $x = -1$. Dividiendo por Rufini resulta:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

El trinomio $x^2 - x + 1$ tiene discriminante negativo, por lo que no tiene raíces reales, es decir, su gráfica no corta al eje de abscisas, y es siempre positivo, $x^2 - x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$h(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x + 1)(x^2 - x + 1) > 0 \Longleftrightarrow p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x + 1) > 0.$$

Como $-1 < \alpha < \beta$, deducimos que:

$$\begin{aligned}
x < -1 \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1 < x < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
\alpha < x < \beta \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números negativos y uno positivo.}\\
\beta < x \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Concluimos que la desigualdad del enunciado es cierta para valores de x en $]-1, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$. ☺

[1] Se entiende que solamente consideramos raíces reales.
[2] Esto es consecuencia del teorema de Bolzano.

Comentario. No es buena estrategia en este tipo de ejercicios estudiar por separado los intervalos en donde el numerador o el denominador son siempre positivos o siempre negativos. Esa forma de proceder complica innecesariamente las cosas.

El signo de $p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x+1)$ en cada intervalo puede estudiarse de muchas formas. Podemos evaluar $p(x)$ en un punto de cada intervalo (es la forma más larga y que requiere más cálculos). También podemos observar que $p(x)$ es un polinomio con coeficiente líder positivo, por lo que para valores de x positivos y muy grandes será $p(x) > 0$, lo que nos dice que para $x > \beta$ es $p(x) > 0$. Ahora, como las raíces de $p(x)$ son simples, se produce un cambio de signo en cada una de ellas y volvemos a obtener el mismo resultado anterior.

Es conveniente simplificar siempre que sea posible. Por ejemplo, si no simplificas la expresión $\alpha = \dfrac{4-\sqrt{24}}{2}$ no podrás comparar fácilmente α con -1, y necesitas poderlo hacer para ordenar las raíces[3].

Vuelvo a recordar que no debéis usar decimales.

Este ejercicio lo habéis hecho bien casi todos.

2. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\log\big(|x-6|(1+|x-3|)\big)}$.

Demostración. El dominio natural de definición de una función que viene dada por medio de una expresión $f(x)$ es el conjunto más grande de números reales donde dicha expresión tiene sentido como número real. En nuestro caso será el conjunto:

$$\mathcal{D} = \left\{x\in\mathbb{R} : \log\big(|x-6|(1+|x-3|)\big) \geqslant 0\right\} = \{x\in\mathbb{R} : |x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1\}.$$

Para estudiar la desigualdad $|x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1$, lo que vamos a hacer es quitar los valores absolutos y para ello consideraremos que x sea mayor o menor que 3 y mayor o menor que 6. Tenemos así las siguientes posibilidades:

- Caso en que $x \leqslant 3$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1 \iff (6-x)(1+3-x) \geqslant 1 \iff x^2-10x+23 \geqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-10x+23 = 0$ son $a = 5-\sqrt{2}$, $b = 5+\sqrt{2}$. Tenemos que $x^2-10x+23 \geqslant 0$ cuando sea $x \leqslant a$ o $x \geqslant b$. Como estamos considerando que $x \leqslant 3$, no puede ser $x \geqslant b$ y la condición $x \leqslant a$ se cumple porque $3 < a$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $x \leqslant 3$.

- Caso en que $3 \leqslant x \leqslant 6$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1 \iff (6-x)(1+x-3) \geqslant 1 \iff x^2-8x+13 \leqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-8x+13 = 0$ son $c = 4-\sqrt{3}$, $d = 4+\sqrt{3}$. Tenemos que $x^2-8x+13 \leqslant 0$ cuando $x \in [c,d]$. Como estamos considerando que $x \in [3,6]$, ambas condiciones se cumplen si $x \in [c,d] \cap [3,6] = [3,d]$, donde hemos tenido en cuenta que $c < 3 < d < 6$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $3 \leqslant x \leqslant 4+\sqrt{3}$.

[3] En tu casa, si no simplificas no pasa nada porque tienes calculadora, pero en un examen puede que no la tengas.

- Caso en que $6 \leqslant x$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1 \Longleftrightarrow (x-6)(1+x-3) \geqslant 1 \Longleftrightarrow x^2-8x+11 \geqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-8x+11=0$ son $u=4-\sqrt{5}$, $d=4+\sqrt{5}$. Tenemos que $x^2-8x+13 \geqslant 0$ cuando $x \leqslant u$ o $x \geqslant v$. Como estamos considerando que $x \geqslant 6$, y tenemos que $u<6<v$, no puede ser $x \leqslant u$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $x \geqslant 4+\sqrt{5}$.

Del estudio anterior se deduce que:

$$\mathcal{D}=\{x\in\mathbb{R} : |x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1\} =]-\infty, 4+\sqrt{3}] \cup [4+\sqrt{5}, +\infty[.$$

☺

Comentario. El fallo principal en este ejercicio ha sido considerar que el dominio natural es el conjunto

$$\{x\in\mathbb{R} : |x-6|(1+|x-3|) > 0\}.$$

Esto no es correcto porque los logaritmos de las números en el intervalo $]0,1[$ son negativos y su raíz cuadrada no está definida en $\mathbb{R}$. Pero, siendo este despiste comprensible, ya no lo es tanto no darse cuenta de que la desigualdad $|x-6|(1+|x-3|)>0$ es, evidentemente, cierta para todo $x \neq 6$. Algunos dedicáis una página para probarlo, son ganas de trabajar.

Hay otras formas más directas de estudiar la desigualdad, pero creo que la que he seguido es la que todos debíais conocer porque hemos hecho ejemplos parecidos en clase y en mis apuntes también hay ejemplos similares.

Algunos entienden que la expresión *"dominio natural"* se refiere al conjunto de los números naturales. Ese disparate es debido a que no han leído la definición.

Un error en este ejercicio es consecuencia de que algunos creen que si $a>0$ y $b \geqslant 1$ y $ab \geqslant 1$, entonces debe ser $a \geqslant 1$. Basta pensarlo diez segundo para darse cuenta de que no tiene por qué ser así.

¡Algunos afirman que el dominio de la función es el conjunto vacío!

3. Prueba que la función $f:[1/2,+\infty[\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2-x+1$ para todo $x \geqslant 1/2$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de f.

Solución. Para probar que la función es estrictamente creciente supondremos que $1/2 \leqslant x < y$ y probaremos que $f(x)<f(y)$. Tenemos que:

$$f(y)-f(x)=y^2-y+1-(x2-x+1)=y^2-x^2-(y-x)=(y-x)(y+x-1)>0.$$

Donde hemos usado que $y-x>0$ (por hipótesis) y que, al ser $1/2 \leqslant x < y$, se tiene que $x+y-1>0$. Hemos probado que f es estrictamente creciente (y por tanto es inyectiva). Para calcular su inversa debemos tomar un valor y en la imagen de f y calcular el único valor de $x \geqslant 1/2$ tal que $fx)=y$. Como $f(1/2)=3/4$, y f es estrictamente creciente su imagen es el intervalo $[3/4,+\infty[$. Sea, pues, $y \geqslant 3/4$. Calculemos x de forma que $f(x)=y$ y no olvidemos que debe ser $x \geqslant 1/2$. Tenemos que:

$$f(x)=y \Longleftrightarrow x^2-x+1-y=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4(1-y)}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{4y-3}}{2}$$

Es obligado elegir la solución dada por:

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4y-3}}{2}.$$

Observa que, al ser $y \geqslant 3/4$, se tiene que $4y - 3 \geqslant 0$ por lo que está definida la raíz cuadrada. ☺

Comentario. Para mi sorpresa este ejercicio, que me parece fácil, casi nadie lo ha hecho completamente bien. Muchos usáis derivadas para probar la monotonía. Eso es matar moscas a cañonazos. En las relaciones de ejercicios se supone que deben usarse las herramientas que se han visto en la correspondiente teoría. Si tienes dudas respecto de lo que puedes usar lo mejor es que me lo preguntes. Lo que me interesa en la primera parte de este ejercicio es que trabajes con desigualdades para probar la monotonía. Claro está, si usas derivadas lo que haces es correcto, pero no es eso lo que quiero evaluar. En la segunda parte me llama la atención que para resolver la ecuación de segundo grado $x^2 - x + 1 - y = 0$, donde la incógnita es x porque y se supone conocido, lo hacéis completando un cuadrado:

$$x^2 - x + 1 - y = (x - 1/2)^2 - y + 3/4 = 0 \Longleftrightarrow (x - 1/2)^2 = y - 3/4 \Longleftrightarrow |x - 1/2| = \sqrt{y - 3/4}$$

Como debe ser $x \geqslant 1/2$, resulta $x - 1/2 = \sqrt{y - 3/4}$, que es la misma solución anterior. La verdad es que, ese proceso de completar un cuadrado es el que se hace para resolver la ecuación de segundo grado y obtener la famosa fórmula que proporciona sus raíces. Pero, en la práctica, casi nunca se hace así, aplicamos la conocida fórmula y ya está. Dicho sea de paso, con una sola excepción, todos afirmáis que $\sqrt{(x-1/2)^2} = x - 1/2$. Eso es cierto solamente si $x \geqslant 1/2$.

Insisto en algo dicho en clase: nunca hay que olvidar el conjunto donde se considera definida una función.

Vuelvo a llamar la atención sobre un error demasiado frecuente que consiste en confundir la función inversa f^{-1} con $1/f$.

Hay quien afirma que f tiene… ¡dos funciones inversas!

Hay quien asegura que f no tiene inversa, como si la pregunta que hago fuera engañosa. Ya sabéis lo que opino al respecto.

Las expresiones como “se puede comprobar”, “se ve”, “es inmediato que” deben evitarse.

4. Dado un número entero $n \in \mathbb{Z}$, justifica que la función $f : [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, es inyectiva y expresa la inversa de f por medio de la función arcoseno. Representa gráficamente la función $h(x) = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$ para $x \in [-3\pi - \pi/2, 3\pi + \pi/2]$.

Solución. Debemos probar que si $x, y \in [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2]$ con $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$, es decir, $\operatorname{sen} x \neq \operatorname{sen} y$. Lo que podemos usar en este ejercicio son las propiedades que hemos visto en clase de la función seno. Sabemos que la función seno es estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$. La idea consiste en deshacer la traslación del intervalo: los puntos $x - n\pi$, $y - n\pi$ están en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y son distintos por ser $x \neq y$, luego se tiene que:

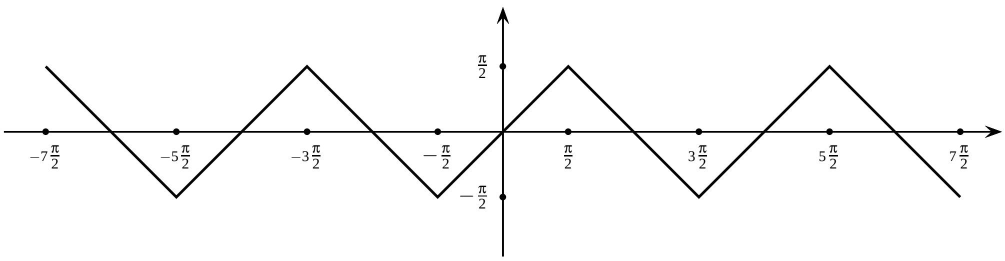
$$\operatorname{sen}(x - n\pi) \neq \operatorname{sen}(y - n\pi) \Longleftrightarrow (-1)^n \operatorname{sen} x \neq (-1)^n \operatorname{sen} y \Longleftrightarrow f(x) = \operatorname{sen} x \neq \operatorname{sen} y = f(y).$$

Hemos probado así que f es inyectiva. Pero, realmente, hemos probado algo más porque hemos visto que si $x \in [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2]$ entonces $x - n\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$ y $\operatorname{sen}(x - n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen} x$. Luego, si n es par resulta, por definición de la función arcoseno, que $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x - n\pi$. Si n es impar se tiene que $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = n\pi - x$. Hemos obtenido que si n es par se verifica que $x = \operatorname{arc\,sen}(f(x)) + n\pi$ para todo $x \in [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2]$, lo que nos dice que la función inversa de f viene dada por $f^{-1}(y) = \operatorname{arc\,sen} y + n\pi$ para todo $y \in [-1, 1]$ (es inmediato que la imagen de f es el intervalo $[-1, 1]$). Análogamente, si n es impar se verifica que $x = -\operatorname{arc\,sen}(f(x)) + n\pi$, lo que nos dice que la función inversa de f viene dada por $f^{-1}(y) = -\operatorname{arc\,sen} y + n\pi$ para todo $y \in [-1, 1]$.

Para representar gráficamente la función $h(x) = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$ para $x \in [-3\pi - \pi/2, 3\pi + \pi/2]$, usaremos lo antes visto:

$$x \in [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2] \Longrightarrow \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} x - n\pi, & \text{si } n \text{ es par.} \\ n\pi - x, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Se obtiene así la siguiente gráfica.



☺

Comentario. En este ejercicio casi todos veis lo que pasa pero no sabéis expresarlo. Lo que no entiendo es que se afirme que la función inversa de f es la función arcoseno. Eso solamente es cierto cuando $n = 0$ porque la función arcoseno toma valores en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Peor todavía es afirmar que $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$ para todo $x \in [3\pi - \pi/2, 3\pi + \pi/2]$ cuando en la representación gráfica se ve claramente que eso no es cierto.

5. Justifica, usando las propiedades de la función exponencial, que la función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de h.

Solución. Debemos probar que si $x < y$ entonces $h(x) < h(y)$. Como la función exponencial es estrictamente creciente, se verifica que $e^x < e^y$ y $e^{-y} < e^{-x}$. Deducimos que:

$$2(h(y) - h(x)) = e^y - e^x + e^{-x} - e^{-y} > 0.$$

Para calcular la inversa, dado $y \in \mathbb{R}$ debemos calcular x por la condición de que $h(x) = y$. Tenemos que:

$$h(x) = y \Longleftrightarrow e^{2x} - 2y\,e^x - 1 = 0 \Longleftrightarrow e^x = y + \sqrt{1 + y^2} \Longleftrightarrow x = \log\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right).$$

Donde hemos hecho $w = e^x$, y tenido en cuenta que debe elegirse la solución positiva de la ecuación $w^2 - 2yw - 1 = 0$. Por tanto la función inversa está definida en toda la recta real y viene dada por $f^{-1}(y) = \log\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$ para todo $y \in \mathbb{R}$. ☺

Comentario. Pese a la indicación dada en el enunciado, os cuesta trabajo probar algo tan sencillo como el crecimiento estricto de la función. El cálculo de la inversa se hizo en clase por lo que todos deberíais de haberlo hecho bien.

Alguno trata de probar ¡por inducción! que la función es estrictamente creciente. El principio de inducción solamente puede aplicarse a propiedades que dependen de los números naturales.

Algunos creen que al número real x le sigue el número $x+1$. Quien piense así no podrá entender nada de los números reales. Entre dos números reales siempre hay infinitos números reales; no hay ningún número real que siga a x porque si $x<y$ entre x e y sigue habiendo infinitos números[4].

[4]Un infinito mucho más grande que el infinito de los números naturales. Quien tenga curiosidad por estos temas que lea el capítulo 5 de mi libro de Cálculo Diferencial e Integral donde se tratan los aspectos matemáticos y filosóficos del infinito.